ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑ.Λ.

9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α.** Απόλυτη συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, ονομάζεται το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού (ή του δείγματος) για τα οποία η μεταβλητή παίρνει την τιμή x_i.

β. Σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, i = 1, 2, … κ, ονομάζεται ο λόγος της συχνότητας v_i της τιμής x_i προς το μέγεθος του δείγματος. Είναι δηλαδή $f_i = \frac{v_i}{v}$.

γ. $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + ... \frac{v_\kappa}{v} = \frac{v_1 + v_2 + ... + v_\kappa}{v} = \frac{v}{v} = 1$

Α2. Μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Α3. **α.** Σωστό (Σ)
β. Λάθος (Λ)
γ. Λάθος (Λ)
δ. Σωστό (Σ)
ε. Λάθος (Λ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή οι όροι του δείγματος είναι 5 και η διάμεσος είναι 15, προκύπτει ότι $4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

Β2. Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{14 + 12 + 18 + 15 + 16}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

οπότε

$$S^2=\frac{(15-14)^2+(15-12)^2+(15-15)^2+(15-16)^2+(15-18)^2}{5}=$$

$$=\frac{1+9+0+1+9}{5}=\frac{20}{5}=4$$

Β3. Είναι $\mathrm{CV}=\frac{s}{|\overline{x}|}=\frac{2}{15}\simeq 0{,}13=13\%$.

Επειδή 13% > 10% το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β4. Στο αρχικό δείγμα έχουμε:

$$\overline{x}=15 \quad \text{και} \quad s_x=2$$

Στο νέο δείγμα έχουμε:

$\overline{y}=-2\cdot 15+5=-30+5=-25$ και

$s_y=|-2|2=4$

Οπότε

$$\mathrm{CV}_y=\frac{4}{|-25|}=0{,}16=16\%.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x)=6x^2-6\kappa x$

Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\big(1,f(x)\big)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, θα έχουμε:

f ΄(1) =0 οπότε

6 – 6κ =0 ⇔ 6 (1 – κ) =0 ⇔ κ =1.

Γ2. Για κ =1 η παράγωγος συνάρτησης της f γράφεται $f'(x)=6x^2-6x$.

Είναι $f''(x)=12x-6$

Λύνουμε την εξίσωση $f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x-6 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

και έχουμε:

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
f''		−	0	+	
f'		↘		↗	
			τ.ελαχ.		

Άρα για την τιμή $x=\frac{1}{2}$ ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Γ3. Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $A\left(-1, f'(-1)\right)$, δηλαδή το $A(-1, 12)$.

- Είναι $f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18$
- Επειδή $f''(-1) = \alpha \Rightarrow \alpha = -18$

οπότε $y = -18x + \beta$

- Επειδή η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $A(-1, f'(-1))$ δηλαδή $A(-1, 12)$ έχουμε $12 = -18(-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι $y = -18x - 6$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+4} + 2018\right)' =$$

$$= \frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Είναι

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	2020	$\nearrow$

Προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή 2020 στη θέση $x_0 = 0$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}^{\,2}-2^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=0.$$