<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 99 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α**. Λάθος.

β. Διότι για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1–1, αλλά όχι γνησίως μονότονη.

Α3. Θεωρία, σελ. 216 σχολικού βιβλίου.

Α4. **α.** Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, είναι:

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=(x)'-4\left(\frac{1}{x^2}\right)'=1-4\left(\frac{-2x}{x^4}\right)=$$

$$=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+2^3}{x^3}=\frac{(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}{x^3}$$

Είναι $x^2-2x+4=(x^2-2x+1)+3=(x-1)^2+3>0$

Άρα $f'(x)=0\Leftrightarrow x+2=0\Leftrightarrow x=-2$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3}>0\Leftrightarrow (x+2)\cdot x^3>0$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3}<0\Leftrightarrow (x+2)\cdot x^3<0$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x+2		$-$	0	$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
f		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	‖	$\nearrow$	

Επομένως η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$.
- Έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = -2$, την τιμή $f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -3$.

B2. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = 8\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 8\frac{-3x^2}{x^6} =$$

$$= -\frac{24}{x^4} < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, ενώ δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

B3

α) Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$\lim\limits_{x\to -0} x = 0$, $\lim\limits_{x\to -0}\left(\frac{-4}{x^2}\right) = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -\infty$. Άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$ (κατακόρυφος άξονας), στο $-\infty$.

β) Οριζόντιες ασύμπτωτες

β1) $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ και η f δεν έχει οριζόντια ασύπτωτη στο $-\infty$.

β2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ και η f δεν έχει οριζόντια ασύπτωτη στο $+\infty$.

γ) Πλάγιες ασύμπτωτες:

Είναι $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 - 4}{x^3}$.

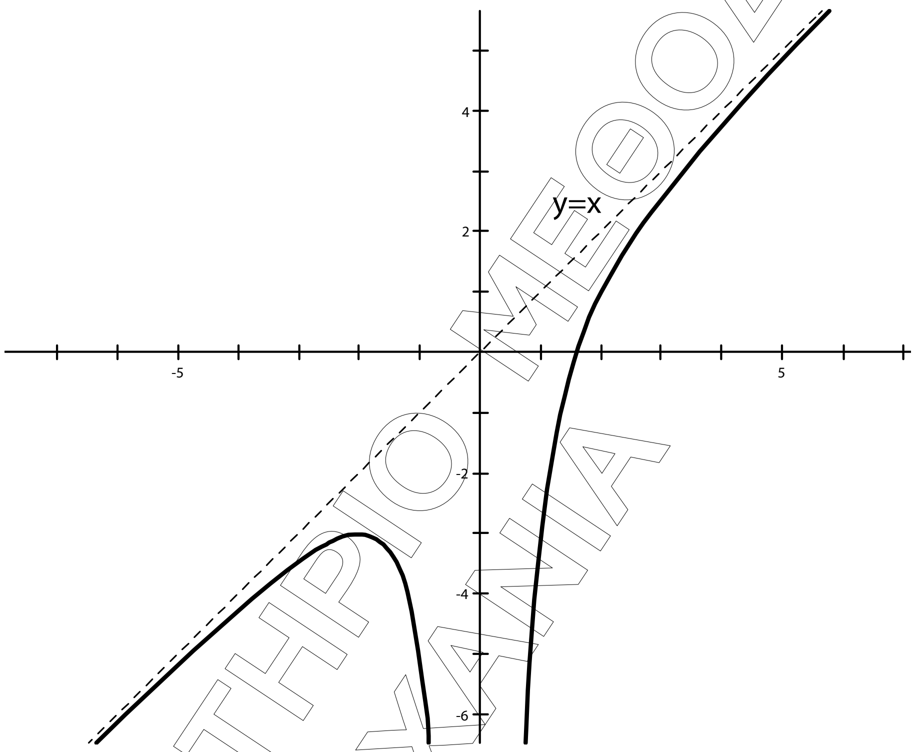
Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. $(=\alpha)$

Επίσης $f(x)-x=\frac{-4}{x^3}$, άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ $(=\beta)$

Άρα η f έχει πλάγια ασύπτωτη την ευθεία $y=x$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β4



$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $A\left(\sqrt[3]{4},0\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πρώτο τμήμα αφού είναι μήκους x και κατασκευάζουμε τετράγωνο. Η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x}{4}$, επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι

$$E_1=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}.$$

Το δεύτερο τμήμα θα είναι μήκους $8-x$. Αν ρ η ακτίνα του κύκλου που κατασκευάζεται με το τμήμα αυτό, τότε θα είναι $2\pi\rho=8-x \Leftrightarrow \rho=\frac{8-x}{2\pi}$.

Άρα το εμβαδόν του κύκλου θα είναι

$$E_2 = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{64+x^2-16x}{4\pi}.$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών θα είναι

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{64+x^2-16x}{4\pi} =$$

$$= \frac{\pi x^2 + 256 + 4x^2 - 64x}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$$

Είναι $x > 0$ και $8 - x > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x < 8 \end{matrix} \Leftrightarrow 0 < x < 8$.

Γ2. Είναι $E'(x) = \frac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x - 64\right], \quad 0 < x < 8$.

Είναι $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\pi+4)x - 64 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{32}{\pi+4}$.

Άρα από τον πίνακα μεταβολών η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4}$

με τιμή $E = \left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4)\frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64\cdot\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \ldots = \frac{16}{\pi+4}$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E΄		-	0	+	
E		↘		↗	

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$

και η διάμετρος του κύκλου είναι

$$2\rho = 2\cdot\frac{8-x}{2\pi} = \frac{8-x}{\pi} = \frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}.$$

Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί ν. δ. ο. η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση στο (0, 8).

Για το διάστημα $A_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$:

$$A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]\xrightarrow[E\ \text{γνησίως φθίνουσα}]{E\ \text{συνεχής}}E(A_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

διότι $\lim\limits_{x\to o^+}E(x)=\dfrac{16}{\pi}$. $\dfrac{16}{\pi+4}\approx 2,24$ και $\dfrac{16}{\pi}\approx 5,09$.

Άρα $5\in E(A_1)$ και άρα από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0\in A_1: E(x_0)=5$ και επειδή η E είναι ↓ στο A_1, άρα το x_0 είναι μοναδικό, στο διάστημα A_1.

Επίσης για το διάστημα $A_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$:

$$A_2=\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\xrightarrow[E\ \text{γνησίως αύξουσα}]{E\ \text{συνεχής}}E(A_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)\ \text{διότι}$$

$$\lim_{x\to 8^-}E(x)=\lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)8^2-64\cdot 8+256}{16\pi}=4$$

$5\notin E(A_2)$ άρα η εξίσωση $E(x)=5$ είναι αδύνατη στο A_2.

Επομένως υπάρχει μοναδική τιμή $x_0\in\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]: E(x_0)=5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=2x^{x-a}-x^2,\quad x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Είναι $f'(x)=2\cdot e^{x-a}-2x^2,\quad x\in\mathbb{R}$.

$$f''(x)=\left(2\cdot e^{x-a}-2x\right)'=2\cdot e^{x-a}-2=2\left(e^{x-a}-1\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{x-a}-1=0\Leftrightarrow e^{x-a}=1\Leftrightarrow e^{x-a}=e^0\Leftrightarrow x-a=0\Leftrightarrow x=a$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow e^{x-a}-1>0\Leftrightarrow e^{x-a}>1\Leftrightarrow e^{x-a}>e^0\overset{e^x\ \text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow}x-a>0\Leftrightarrow x>a$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow e^{x-a}-1<0\Leftrightarrow e^{x-a}<1\Leftrightarrow e^{x-a}<e^0\overset{e^x\ \text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow}e-a<0\Leftrightarrow x<a$$

Συγκεντρωτικό:

x	-∞	α	+∞
f´(x)	-	0	+
f		Σ.Κ.	

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x_0=a$.

Δ2 **α)** $f'(x)=2\left(e^{x-a}-x\right),\ x\in\mathbb{R}$

βρίσκουμε το όριο της f' στο $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{x-a}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^a}\cdot e^x\right)=\frac{1}{e^a}\cdot 0=0,$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$

β) $f'(a) = 2\left(e^{a-a} - x\right) = 2(1+a) < 0$ **.**

γ) Βρίσκουμε το όριο της f' όταν $x \to +\infty$

Είναι $f'(x) = \dfrac{2}{e^a} \cdot e^x - 2x = x \cdot \left(\dfrac{2}{e^a} \cdot \dfrac{e^x}{x} - 2 \right)$**.**

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(e^x\right)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{e^a} \cdot \dfrac{e^x}{x} - 2 \right) = +\infty$

Επίσης $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ (λόγω του Β1)

Άρα $f'\left((-\infty, a]\right) = \left[f'(a), \lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) \right) = \left[2 \cdot (1-a), +\infty \right)$.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ (λόγω του Δ1)

Άρα $f'\left([a, +\infty)\right) = \left[f'(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) \right) = \left[2 \cdot (1-a), +\infty \right)$, με $2(1 - \alpha) < 0$.

Άρα υπάρχει τιμή x_1 στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ ώστε $f'(x_1) = 0$ και τιμή x_2 στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$, ώστε $f'(x_2) = 0$.

Όμως στο $(-\infty, \alpha]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα

άρα $x < x_1 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$

για $x > x_1 \Rightarrow f'(x) < f'(x_1) \Rightarrow f'(x) < 0$

Επίσης στο $[\alpha, +\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα

άρα $x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$

για $x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$

Δηλαδή προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών της f'

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f'	$+\infty$	+	0		-		0	+	$+\infty$
f		↗	τ.μ.	↘		↘	τ.ε.	↗	

Προκύπτει ότι υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2 τέτοια ώστε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. Αφού $α > 1$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, α]$ ισχύει:

$a > 1 \Rightarrow f'(a) < f'(1) \Rightarrow 2 - 2a < 2 \cdot e^{1-a} - 2 \Rightarrow e^{1-a} > 2 - a$ (1).

Στο διάστημα $(α, x_2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα το

$f\left((a, x_2)\right) = \left(\lim\limits_{x \to x_2^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right) = \left(\lim\limits_{x \to x_2^-} f(x), 2 - a^2\right)$, δηλαδή

$f(x) < 2 - a^2 = f(a)$ (2)

Είναι $f(1) = 2 \cdot e^{1-a} - 1$

Όμως λόγω της (1)

$e^{1-a} > 2 - a \Rightarrow 2e^{1-a} > 2(2 - a) \Rightarrow 2 \cdot e^{1-a} - 1 > 4 - 2a - 1 \Rightarrow f(1) > 3 - 2a$.

Όμως $3 - 2a > 2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0$, που ισχύει.

Άρα $f(1) > f(a)$ (3)

Από (2) και (3) έπεται:

$f(x) < f(a) < f(1)$, άρα η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.

(<u>β' τρόπος</u>)

Επειδή $α > 1$ είναι $1 - α < 0$ και $e^{1-a} < e^0 \Leftrightarrow e^{1-a} < 1 \Leftrightarrow e^{1-a} - 1 < 0$.

Όμως $f'(1) = 2\left(e^{1-a} - 1\right)$, άρα $f'(1) < 0$.

Αν $1 \le x_1$ επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, α]$ άρα και στο $\left(-\infty, x_1\right] \subseteq \left(-\infty, a\right]$ είναι $f'(1) \ge f'(x_1) \Leftrightarrow f'(1) \ge 0$ άτοπο

Άρα $1 > x_1$ ή $α > 1 > x_1$.

Στο διάστημα $\left[a, x_2\right) \subseteq \left[x_1, x_2\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα επειδή

$a > 1 \Rightarrow f(a) < f(1)$ (1)

Επίσης είναι $f\left((a, x_2)\right) = \left(f(x_2), f(\alpha)\right)$.

Άρα για κάθε $x \in (a, x_2)$ είναι $f(x) < f(a) < f(1)$ (λόγω της 1).

Άρα η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.

(<u>γ' τρόπος</u>)

$f(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[a, x_2\right]$ άρα

$f\left[a, x_2\right] = \left[f\left(x_2\right), f\left(\alpha\right)\right]$

Όμως $f\left(1\right) = 2 \cdot e^{1-\alpha} - 1$ και $f(\alpha) = 2 - a^2$.

Θα δείξουμε ότι: $f\left(1\right) > f\left(\alpha\right) \Leftrightarrow 2 \cdot e^{1-\alpha} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$,

με $α > 1$.

Έστω $\mathrm{K}\left(x\right) = 2 \cdot e^{1-x} + x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $K(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

Η $\mathrm{K}\left(x\right)$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων με:

$\mathrm{K}'\left(x\right) = -2 \cdot e^{1-x} + 2 \cdot x$

Η $\mathrm{K}'\left(x\right)$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων με:

$\mathrm{K}''\left(x\right) = 2 \cdot e^{1-x} + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\mathrm{K}'(x)$ γνησίως αύξουσα και ισχύει $\mathrm{K}'(1)=0$.

Για $x<1 \overset{\mathrm{K}'(x)\text{ γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} \mathrm{K}'(x)<\mathrm{K}'(1)=0$ άρα $\mathrm{K}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα

Για $x>1 \overset{\mathrm{K}'(x)\text{ γνησίωςαύξουσα}}{\Longrightarrow} \mathrm{K}'(x)>\mathrm{K}'(1)=0$ άρα $\mathrm{K}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

x	-∞	1	+∞
K΄(x)	-	0	+
K(x)	↘		↗

τοπ.
ελάχιστο

Η $\mathrm{K}(x)$ έχει ελάχιστο το $\mathrm{K}(1)=0$, και $\mathrm{K}(x) > \mathrm{K}(1) = 0$ για κάθε $x > 1$.

Δ4 Για $\alpha = 2$, είναι $f(x)=2\cdot e^{x-2}-x^2$.

Η εφαπτομένη της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ είναι η ευθεία:

$y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow y-(-2)=-2(x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+2=-2x+4 \Leftrightarrow y=-2x+2 \Leftrightarrow y=-2(x-1)$

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha,+\infty)=[2,+\infty)$, προκύπτει ότι για $x\in[2, 3]$:

$$f(x)\geq -2(x-1) \Leftrightarrow f(x)\cdot\sqrt{x-2}\geq -2(x-1)\sqrt{x-2} \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot\sqrt{x-2}-\left(-2(x-1)\sqrt{x-2}\right)\geq 0.$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 2$.

Άρα

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}-\left(-2(x-1)\sqrt{x-2}\right)dx>0 \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>\int_2^3\left[-2(x-1)\sqrt{x-2}\right]dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-2\int_2^3(x-2+1)\sqrt{x-2}\,dx. \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα του 2^ου^ μέλους θέτουμε $u = x - 2$, οπότε αυτό γράφεται:

$$\int_2^3(x-2+1)\sqrt{x-2}\,dx=\int_0^1(u+1)\sqrt{u}.$$

Έτσι η (1) γράφεται

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-2\int_0^1(u+1)\sqrt{u}$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-2\int_0^1\left(u^{3/2}+u^{1/2}\right)du,$$

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -2\left[\frac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -2\left(\frac{2}{5}\right) - 2\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$$